

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的代换的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{kx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-kx}{x} = -k = 2 \Rightarrow k = -2.$

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小的比较的知识点.

【应试指导】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$, 所以 $\ln(1+2x^2)$ 为 x 的高阶无穷小量.

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了隐函数求导的知识点.

【应试指导】 方程两边同时对 x 求导, 得 $3y^2 y' + 3x^2 - 3(y + xy') = 0$, 解得 $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$. 将 $x = 0$ 代入方程得

$$y = 1. \text{ 所以 } f'(0) = \frac{1 - 0^2}{1^2 - 0} = 1.$$

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x$, 所以 $dy \Big|_{x=1} = (\sin 1 + \cos 1) dx$.

5. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了导数的几何意义的知识点.

【应试指导】 $k_{\text{切}} = \left(\frac{1}{x}\right)' \Big|_{x=1} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1$, 所以 $k_{\text{法}} = 1$.

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int (2x+1)^2 dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^2 d(2x+1) = \frac{1}{6} (2x+1)^3 + C$.

7. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质和计算的知识点.

【应试指导】 原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了反常积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了偏导数的计算的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+xy} (1+xy)'_y = \frac{x}{1+xy}.$

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的计算的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{y}{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{x^2}.$

11.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了求函数最值的方法的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x-1)(x+2)$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 1, x = -2$, 而 $f(-3) = 23, f(4) = 142, f(1) = 7, f(-2) = 34$, 所以最大值和最小值分别为 142, 7.

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数齐次线性微分方程的求解的知识点.

【应试指导】 微分方程的特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$, 解得特征根为 $r_{1,2} = 3$, 所以通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$

二、填空题

13.【答案】 $\frac{2}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质和计算的知识点.

【应试指导】 原式 $= \int_{-1}^1 \arctan x dx + \int_{-1}^1 x^2 dx = 0 + 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

14.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了间断点的判定的知识点.

【应试指导】 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x = 0$ 处无定义, 所以间断点为 $x = 0$.

15.【答案】 $y = 2$

【考情点拨】 本题考查了曲线的水平渐近线的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2} = 2$, 所以水平渐近线为 $y = 2$.

三、解答题

16. 由于函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,

$$\text{故有 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a) = a, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

故 $a = 1$.

17. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\} = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ 关于 y 轴对称,

函数 x 关于 x 为奇函数, 则 $\iint_D x dx dy = 0$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } \iint_D (x + y) dx dy &= \iint_D y dx dy = \iint_D r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 dr = \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\pi (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \left(\theta - \sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right) \Big|_0^\pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

$$18. \because \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1),$$

$$\therefore \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n,$$

由 $-1 < -2x < 1$, 得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$,

$$\text{故 } y = \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$