

# 2024 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

## 高等数学(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

### 第 I 卷(选择题,共 84 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12 小题,每小题 7 分,共 84 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{kx}}{x} = 2$ , 则  $k =$  【    】

A. -2                      B. -1                      C. 1                      D. 2
2. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1 + 2x^2)$  为  $x$  的 【    】

A. 低阶无穷小量                      B. 等价无穷小量

C. 同阶无穷小量,但不是等价无穷小量                      D. 高阶无穷小量
3. 设函数  $y = f(x)$  由方程  $y^3 + x^3 - 3xy = 1$  所确定,则  $f'(0) =$  【    】

A. 2                      B. 1                      C.  $\frac{1}{2}$                       D. -1
4. 设  $y = x \sin x$ , 则  $dy \Big|_{x=1} =$  【    】

A.  $(\sin 1 + \cos 1) dx$                       B.  $(\sin 1 - \cos 1) dx$

C.  $\sin 1 dx$                       D.  $\cos 1 dx$
5. 曲线  $y = \frac{1}{x}$  在点  $(1, 1)$  处法线的斜率为 【    】

A. -1                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D. 1
6.  $\int (2x + 1)^2 dx =$  【    】

A.  $\frac{(2x + 1)^3}{3} + C$                       B.  $\frac{(2x + 1)^3}{6} + C$

C.  $3(2x + 1)^3 + C$                       D.  $6(2x + 1)^3 + C$

7.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x) dx =$  【   】

- A. -2                      B. -1                      C. 1                      D. 2

8.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$  【   】

- A.  $-\frac{\pi}{2}$                       B.  $-\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

9. 设  $z = \ln(1 + xy)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial y} =$  【   】

- A.  $\frac{x}{1+xy}$                       B.  $\frac{y}{1+xy}$                       C.  $\frac{1}{1+xy}$                       D.  $-\frac{x}{1+xy}$

10. 设  $z = xy + \frac{y}{x}$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$  【   】

- A.  $\frac{2y}{x^3}$                       B.  $1 - \frac{1}{x^2}$                       C.  $x + \frac{1}{x}$                       D.  $y - \frac{y}{x^2}$

11. 函数  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$  在区间  $[-3, 4]$  上的最大值和最小值分别为 【   】

- A. 34, 7                      B. 34, 23  
C. 142, 7                      D. 142, 23

12. 微分方程  $y'' - 6y' + 9y = 0$  的通解为 【   】

- A.  $y = Ce^{3x}$                       B.  $y = e^{3x} + C$   
C.  $y = Cxe^{3x}$                       D.  $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$

### 第 II 卷 (非选择题, 共 66 分)

得 分	评卷人

#### 二、填空题 (13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13.  $\int_{-1}^1 (\arctan x + x^2) dx =$  \_\_\_\_\_.

14. 函数  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  的间断点为  $x =$  \_\_\_\_\_.

15. 曲线  $y = \frac{2x^2}{x^2 - 2}$  的水平渐近线方程为 \_\_\_\_\_.

得分	评卷人

三、解答题(16~18题,每小题15分,共45分.解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分15分)

设函数  $f(x) = \begin{cases} x+a, & x \geq 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 求  $a$ .

17. (本题满分 15 分)

计算  $\iint_D (x+y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$ .

18. (本题满分 15 分)

将  $y = \frac{1}{1+2x}$  展开成  $x$  的幂级数.

# 参考答案及解析

## 一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的代换的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{kx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-kx}{x} = -k = 2 \Rightarrow k = -2.$

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小的比较的知识点.

【应试指导】 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ , 所以  $\ln(1+2x^2)$  为  $x$  的高阶无穷小量.

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了隐函数求导的知识点.

【应试指导】 方程两边同时对  $x$  求导, 得  $3y^2 y' + 3x^2 - 3(y + xy') = 0$ , 解得  $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$ . 将  $x = 0$  代入方程得

$y = 1$ . 所以  $f'(0) = \frac{1 - 0^2}{1^2 - 0} = 1.$

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的微分的知识点.

【应试指导】  $y' = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ , 所以  $dy \Big|_{x=1} = (\sin 1 + \cos 1) dx.$

5. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了导数的几何意义的知识点.

【应试指导】  $k_{切} = \left(\frac{1}{x}\right)' \Big|_{x=1} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1$ , 所以  $k_{法} = 1.$

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】  $\int (2x+1)^2 dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^2 d(2x+1) = \frac{1}{6} (2x+1)^3 + C.$

7. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质和计算的知识点.

【应试指导】 原式  $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了反常积分的计算的知识点.

【应试指导】  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了偏导数的计算的知识点.

【应试指导】  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+xy} (1+xy)'_y = \frac{x}{1+xy}.$

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的计算的知识点.

【应试指导】  $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{y}{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{x^2}.$

11.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了求函数最值的方法的知识点.

【应试指导】  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x-1)(x+2)$ , 令  $f'(x) = 0$ , 则  $x = 1, x = -2$ , 而  $f(-3) = 23, f(4) = 142, f(1) = 7, f(-2) = 34$ , 所以最大值和最小值分别为 142, 7.

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数齐次线性微分方程的求解的知识点.

【应试指导】 微分方程的特征方程为  $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$ , 解得特征根为  $r_{1,2} = 3$ , 所以通解为  $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$

## 二、填空题

13.【答案】  $\frac{2}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质和计算的知识点.

【应试指导】 原式  $= \int_{-1}^1 \arctan x dx + \int_{-1}^1 x^2 dx = 0 + 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

14.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了间断点的判定的知识点.

【应试指导】  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  在  $x = 0$  处无定义, 所以间断点为  $x = 0$ .

15.【答案】  $y = 2$

【考情点拨】 本题考查了曲线的水平渐近线的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2} = 2$ , 所以水平渐近线为  $y = 2$ .

### 三、解答题

16. 由于函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续,

$$\text{故有 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a) = a, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

故  $a = 1$ .

17.  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\} = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$  关于  $y$  轴对称,

函数  $x$  关于  $x$  为奇函数, 则  $\iint_D x dx dy = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{所以 } \iint_D (x + y) dx dy &= \iint_D y dx dy = \iint_D r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 dr = \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\pi (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\pi \left( 1 - 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \left( \theta - \sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right) \Big|_0^\pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

$$18. \because \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1),$$

$$\therefore \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n,$$

由  $-1 < -2x < 1$ , 得  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ ,

$$\text{故 } y = \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$